

准双曲面齿轮 LTCA 弯曲变形 约束方法

王 琪, 周 驰, 桂良进, 范子杰

(清华大学 机械工程学院 汽车工程系 汽车安全与节能国家重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 针对现有准双曲面齿轮加载接触分析(LTCA)受载后得到的弯曲变形中包含由于柔性引起的变形和加载点与轮坯之间剪切变形的问题,提出了轮齿有限元模型约束方法用于消除柔性引起的变形和剪切变形。该约束方法在原有约束方法的基础上引入了约束轮坯内圈和轮齿中间平面的有限元模型,并给出了该约束方法对应的齿面法向柔度矩阵的计算过程。为验证该约束方法的正确性,将原约束方法、该约束方法及实验结果进行对比。结果表明:约束方法主要影响齿面加载接触印迹的范围,最大载荷时原有约束方法加载接触印迹到达齿面小端,而该约束方法的加载接触印迹在最大载荷时距离小端仍有 3~4 mm 与实验结果吻合更好。

关 键 词: 准双曲面齿轮; 齿轮加载接触分析 (LTCA); 约束方法; 有限元模型 (FEM); 接触印迹
中图分类号: V232.8; TH132.4 **文献标志码:** A

Constraint method of calculating tooth bending deformation of hypoid gears in LTCA

WANG Qi, ZHOU Chi, GUI Liangjin, FAN Zijie

(State Key Laboratory of Automotive Safety and Energy,
Department of Automotive Engineering, School of Mechanical Engineering,
Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Given that the bending deformation obtained from loaded tooth contact analysis (LTCA) of spiral bevel and hypoid gears contains deformations due to flexibility and shearing deformations, a constraint method of the tooth finite element model used in LTCA was proposed. This constraint method added a finite element model which fixed the nodes in the center of the tooth and the inner circle on the basis of the original constraint method. The process to obtain the normal flexibility matrix of tooth surface was also proposed. To verify the correctness of this constraint method, LTCA was conducted using this constraint method and the original one. Load contact experiment was conducted at the same time. Result showed that the constraint method mainly affected the loaded contact pattern. The loaded contact pattern obtained by the original constraint method reached the toe of the tooth under the maximum torque, while there was still 3—4 mm away from the toe of the loaded con-

收稿日期: 2016-04-27

基金项目: 校企合作项目(20142000237); 国家重点实验室重点项目(ZZ2013-014)

作者简介: 王琪(1988—),男,博士生,主要研究方向为齿轮传动系统设计分析。

通讯作者: 范子杰(1958—),男,教授、博士生导师,博士,主要研究方向为汽车结构 CAE、驱动桥传动系统设计分析。

E-mail: zjfan@tsinghua.edu.cn

引用格式: 王琪,周驰,桂良进,等. 准双曲面齿轮 LTCA 弯曲变形约束方法[J]. 航空动力学报, 2017, 32(11): 2800-2807. WANG Qi, ZHOU Chi, GUI Liangjin, et al. Constraint method of calculating tooth bending deformation of hypoid gears in LTCA [J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(11): 2800-2807.

tact pattern obtained by this constraint method. The loaded contact pattern obtained from this constraint method was in agreement better with the experiment.

Key words: hypoid gears; loaded tooth contact analysis (LTCA); constraint model; finite element model (FEM); contact pattern

准双曲面齿轮是传动系统的关键部件,在汽车和航空工业中经常用于高速重载的工作条件。准双曲面齿轮加载接触分析(LTCA)方法是这类齿轮设计过程中的一项关键技术。它的主要作用是,在利用实际加工参数进行切齿之前,先计算准双曲面齿轮在真实工作载荷下的各性能指标,包括齿面加载接触印迹,加载传动误差等^[1-2]。利用 LTCA 技术可以缩短准双曲面齿轮的研发周期和研发成本。

LTCA 分析方法中,轮齿的变形主要分为 3 部分如图 1,分别为弯曲变形 δ_b 、接触变形 δ_c 和剪切变形 δ_s 。Krenzer^[3] 提出齿面的接触变形使用赫兹接触计算,弯曲变形和剪切变形采用考虑剪切影响的 Westinghouse 悬臂梁模型。何静安、郑昌启等^[4-5] 采用了相同的方法进行了 LTCA 分析并考虑了错位量。由于悬臂梁模型较为简化,整体精度不高,随着有限元技术的发展^[6], Wilcox、Fan 等^[7-8] 提出使用韦伯模型计算接触变形和剪切变形,使用轮齿实体有限元模型计算弯曲变形,该分析模型也是 LTCA 分析中经典的分析模型。类似的方宗德等^[9-10] 也进行了 LTCA 分析。另外也有学者直接采用完全的有限元方法进行接触计算^[11-14],但这种方法与上述介绍的方法相比计算效率较低^[15],不适用于初步设计时的快速计算验证。

在 LTCA 方法引入轮齿实体有限元模型计

算弯曲变形过程中,约束了轮坯内圈节点全部自由度,并认为在计算弯曲变形时,得到的齿面接触点的法向变形就是轮齿中部的弯曲变形,但由于轮齿实体有限元模型具有柔性,因此得到的弯曲变形中还包含了由于柔性引起的变形和加载点处与轮坯之间的剪切变形(下文统称为其他变形)。

本文针对现有 LTCA 计算方法得到的轮齿弯曲变形中包含其他变形的问题,提出了一种约束方法用来消除包含的其他变形,同时给出了该约束方法下,齿面法向柔度矩阵的计算方法。最后为了与原有的方法进行比较,采用两种不同约束方法进行了 LTCA。通过与实验结果进行分析对比,说明了不同约束方式对 LTCA 结果的影响,验证了本文提出的约束方法更符合实际情况。

1 消除弯曲变形中其他变形的约束方法

LTCA 解析分析方法中,弯曲变形的计算引入了轮齿有限元模型,如图 2 所示。轮齿和齿坯均采用了八节点六面体等参单元,其单元刚度矩阵可以表示为^[16-17]

$$k_e = \iiint B^T DB \det(J) d\xi d\eta d\zeta \tag{1}$$

式中 B 为单元应变矩阵; J 为雅克比矩阵; D 为弹性矩阵; ξ, η, ζ 为等参单元在局部坐标系下的参数坐标。

利用式(2)将单元刚度矩阵进行组集即可得到整体刚度矩阵 $\tilde{K}$

$$\tilde{K} = \sum_i^n k_e \tag{2}$$

式中 n 代表单元个数,求和过程实际为单元刚度矩阵的每个系数按照其所在自由度位置叠加。

将整体刚度矩阵 $\tilde{K}$ 写成以内部自由度(以 t 表示)和边界自由度(以 b 表示)的形式,见式(3)

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{tb} \\ K_{bt} & K_{bb} \end{bmatrix} \tag{3}$$

以齿面节点作为凝聚节点,该节点对应边界自由度,利用 Guyan 缩减法^[18]将整体刚度矩阵 $\tilde{K}$ 凝聚为齿面凝聚刚度矩阵 K

$$K = K_{tt} - K_{tb} K_{bb}^{-1} K_{bt} \tag{4}$$

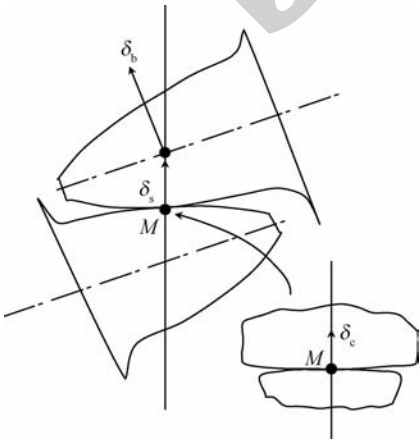


图 1 轮齿的主要 3 部分变形

Fig. 1 Three parts of deformation of tooth

获得齿面凝聚刚度矩阵后,针对施加的载荷即可得到对应齿面节点的变形,利用单元形函数即可将其转化为接触点的变形,即式(5)

$$d = NK^{-1}F \tag{5}$$

式中 N 为单元形函数, F 为载荷向量, d 为接触点位移向量。

现有 LTCA 方法中,弯曲变形的计算模型是约束轮坯内圈节点的全部自由度,如图 2 所示。根据上述计算过程可以计算得到其齿面凝聚刚度矩阵 K_1 ,并计算得到接触点弯曲变形。

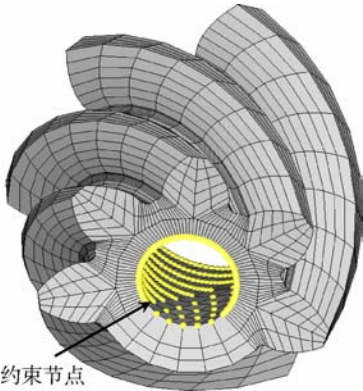


图 2 约束齿轮模型轮坯内圈节点(有限元模型 1)
Fig. 2 Fix the nodes in the gear hole (FEM 1)

上述现有计算模型的约束方法中,由于轮齿实体有限元模型具有柔性,因此得到的弯曲变形中还包含了由于柔性引起的变形和加载点处与轮坯之间的剪切变形。

为了消除上述中弯曲变形包含的其他变形,本文提出了一种约束方法,与原有方法不同的是它包含两个有限元模型。有限元模型 1 如图 2 所示,它与现有方法分析模型相同;有限元模型 2 如图 3 所示,相比有限元模型 1,有限元模型 2 在约束内圈节点全部自由度的基础上,还在轮齿中间位置处约束轮齿中间面周向转动自由度,即保证

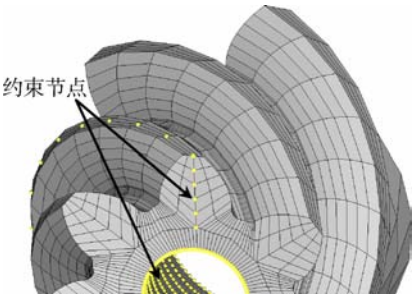


图 3 约束轮坯内圈及轮齿中间平面(有限元模型 2)
Fig. 3 Fix the nodes in the gear hole and middle plane (FEM 2)

约束轮齿中间面不发生弯曲变形。在有限元模型 2 中受力产生的变形是由于有限元模型柔性产生的变形和加载点与轮坯之间的剪切变形。采用与有限元模型 1 相同的方法可得到相应约束条件下的齿面凝聚刚度矩阵 K_2 。

在 LTCA 计算过程中,将轮齿转动划分为多个时刻,因此需要计算的每一时刻各接触点的弯曲变形。为了计算得到各接触点的变形值,需要将齿面节点的凝聚刚度矩阵 K 转化为齿面接触点的法向柔度矩阵 R 。本文提出的约束方法对应的接触点法向柔度矩阵,需要使用上述两个约束模型计算。下面部分将介绍获得齿面接触点法向柔度矩阵的过程。

2 齿面接触点法向柔度矩阵计算

齿面接触点法向柔度矩阵 $R[i,j]$ 中每一项的定义为:由 i 点施加的单位法向载荷,引起的 j 点的法向变形。因此为了计算小轮和大轮的齿面法向柔度矩阵,需要对接触线上的点施加相应的法向单位载荷 F_{unit} ,并计算由其产生的其他接触点的法向变形。这里取其中某一时刻的一条接触线进行说明。

图 4 中,在接触线上接触点 1 施加该方向的单位法向载荷,根据有限元模型将该载荷分解到该点所在单元靠齿面一侧的节点上,并根据齿面凝聚刚度矩阵,计算得到其他齿面节点位移,获得节点位移后再通过单元形函数得到接触线上的点 1~4 的法向位移。最后得到 $R[1,1] \sim R[1,4]$,分别代表的含义为由 1 点处的载荷引起的 1~4 点的变形。柔度矩阵中其他项也用类似过程计算。

本文提出的约束方法计算齿面接触点法向柔度矩阵过程为:对于任意一条接触线,利用有限元

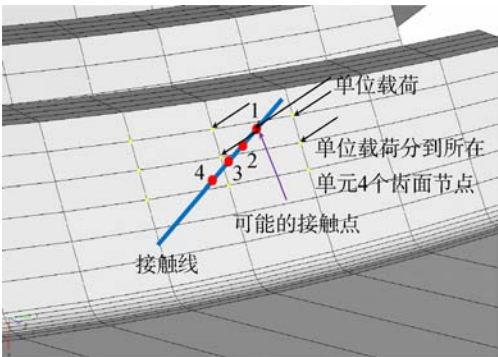


图 4 柔度矩阵计算说明示意
Fig. 4 Sketch of calculating flexibility matrix

模型 1 的凝聚刚度矩阵 $\mathbf{K}_1$ 得到接触线第 i 点加载对应的各接触点法向位移为 $\mathbf{d}_{1i}$,如式(6),利用有限元模型 2 的凝聚刚度矩阵 $\mathbf{K}_2$ 得到接触线第 i 点加载对应的各接触点法向位移为 $\mathbf{d}_{2i}$,如式(7),则该条接触线的法向柔度矩阵第 i 列 $\mathbf{R}[:,i]$ 可以由式(8)获得。

$$\mathbf{d}_{1i} = \mathbf{N}\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{F}_{\text{unit}} \tag{6}$$

$$\mathbf{d}_{2i} = \mathbf{N}\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{F}_{\text{unit}} \tag{7}$$

$$\mathbf{R}[:,i] = \mathbf{d}_{1i} - \mathbf{d}_{2i} \tag{8}$$

按照式(6)~式(8)分别计算小轮和大轮各条接触线的法向柔度矩阵,得到小轮齿面法向柔度矩阵为 $\mathbf{R}_p$ 和大轮齿面法向柔度矩阵 $\mathbf{R}_g$ 。

3 LTCA 载荷分配

建立大小轮柔度矩阵计算模型后,给定小轮输入扭矩即可进行 LTCA。LTCA 每一时刻载荷分配是一个迭代计算的过程,该迭代过程中,需要满足位移协调方程和转矩协调方程。位移协调方程是指受力后产生的所有变形之和应等于齿轮刚体运动产生的位移与初始间距之差。其协调方程为式(9)

$$\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_g \mathbf{F} + \mathbf{S}_c(\mathbf{F}) - \mathbf{Z} + \mathbf{d}_0 < \epsilon \tag{9}$$

式中 $\mathbf{R}_p, \mathbf{R}_g$ 分别为小轮和大轮齿面接触点法向柔度矩阵; $\mathbf{F}$ 为施加的载荷; $\mathbf{S}_c$ 为产生的接触变形和剪切变形,采用韦伯模型计算; $\mathbf{Z}$ 为由齿轮刚体转动产生的位移,它由大轮的转角计算出来,可以等效看成附加一个传动误差 Δ_{te} ; $\mathbf{d}_0$ 为两齿面接触点的初始间距, ϵ 为迭代容差。

转矩协调方程如下,它是指各接触点上的力产生的转矩之和满足输入转矩要求

$$T_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_g] \tag{10}$$

式中 $\mathbf{F}_i$ 为 i 点的载荷向量, $\mathbf{r}_i$ 为 i 点的位置向量, $\mathbf{p}_g$ 为大轮轴线向量, n 为接触线上接触点的数目, m 为同一时刻参与接触的齿数, T_{sum} 为总输入载荷。

由于 LTCA 载荷分配迭代过程不是本文分析重点,这里给出其主要过程包括

1) 首先给定迭代的初始时刻 $t_0 = 1$, 计算各齿面之间的法向间距 $\mathbf{d}_0$, 并在此基础上附加一初始转动调整量 Δ_{te0} , 一般取 $100 \mu\text{rad}$ 左右, 该值为迭代计算初值。

2) 其次, 判断各齿的啮合状态及可能接触的点, 在这些点施加载荷初值 $\mathbf{F}_0$, 计算所有变形。接触变形和剪切变形采用韦伯模型计算, 弯曲变

形采用本文提出的上述新约束方法计算。若接触线上点的变形不满足位移协调方程(式(4)), 则对载荷值进行迭代, 获得迭代后的载荷 $\mathbf{F}_1$; 若满足位移协调方程, 则进行下一步计算。

3) 计算各齿面上接触点的载荷引起的转矩是否满足转矩协调方程(式(5)), 若不满足则对初始施加的调整量 Δ_{te} 进行迭代, 得到下一个时刻的初值 Δ_{te1} 。若满足转矩协调方程, 则该时刻计算完毕, 输出相应的计算结果。

4) 更新计算时刻, 重复上述 1) 至 4) 过程进行下一时刻的计算, 直至所有时刻计算完成输出结果。

其流程图如图 5 所示。

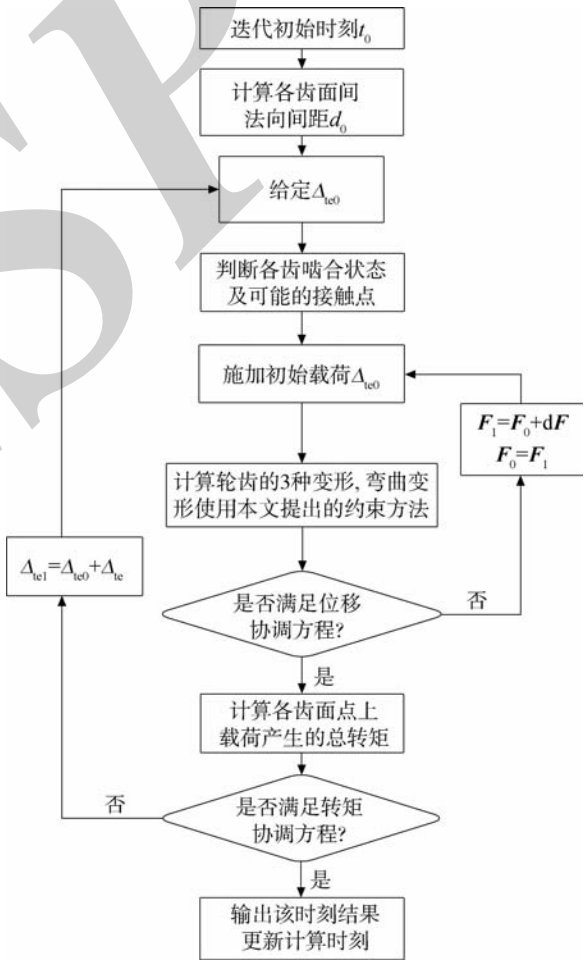


图 5 LTCA 载荷分配迭代计算流程图

Fig. 5 Flow chart of iteration of calculating LTCA distribution

4 算例说明

4.1 计算模型说明

下面给出一组格里森制准双曲面齿轮副, 进

行 LTCA、LTCA 迭代计算时弯曲变形计算采用上述介绍的约束方法。同时为了与原有约束方法进行对比,也采用了原有文献[7-8]约束方法进行了 LTCA。所使用的齿轮副参数如表 1,其采用的加工方法是刀倾半展成(HFT)法,精加工采用磨齿工艺。大小轮加工参数见表 2、表 3。小轮凹面在磨齿加工时加入了刀具的圆弧修形,修形圆弧半径为 1500 mm。

表 1 准双曲面齿轮设计参数

Table 1 Design parameters of hypoid gear

参数	数值及详情	
	小轮	大轮
齿数	7	39
旋向	左	右
小轮中点期望螺旋角/(°)	43.85	
偏置距/mm	26	
大轮齿面宽/mm		61
模数	10.9	
轴交角/(°)	90	
平均压力角/(°)	22.5	
大轮刀盘名义半径/mm		152.4
轮齿收缩方式	根倾收缩	
齿高系数	3.6	
齿顶高系数	0.13	
顶隙系数	0.15	
最大齿侧间隙/mm	0.33	
最小齿侧间隙/mm	0.25	
刀尖圆角半径/mm	1.7	2.3
大轮精切刀盘刀顶距/mm		5
大轮刀具齿形角/(°)		22.5
小轮外刀刀具齿形角/(°)	20	
小轮内刀刀具齿形角/(°)	25	

表 2 大轮加工参数

Table 2 Machine setting parameters of wheel

参数	数值
垂直刀位/mm	123.5533
水平刀位/mm	96.3544
水平轮位/mm	-1.6070
机床安装根锥角/(°)	74.7683

表 3 小轮加工参数

Table 3 Machine setting parameters of pinion

参数	数值	
	凹面	凸面
基本摇台角/(°)	60.3220	60.7954
垂直轮位/mm	18	34
水平轮位/mm	0.7360	3.5325
机床安装根锥角/(°)	-4.5273	-6.2152
径向刀位/mm	151.2363	165.7187
滚比	5.4328	5.7153
床位/mm	14.1914	29.7285
刀转角/(°)	151.1859	318.1273
刀倾角/(°)	-17.6359	17.5129
外刀(凸面内刀)	149.0029	159.1733
刀尖半径/mm		

4.2 计算结果

上述设计的准双曲面齿轮实际运行工况有 3 种,对应输入转矩分别为 538.46、1076.9、1615.4 N·m,在此命名为工况 1、工况 2、工况 3。下文中约束方法 1 对应着原有文献[7-8]中的旧约束方法,约束方法 2 对应着本文提出的消除弯曲变形中其他变形的约束方法。

3 种工况的接触印迹区域对比见图 6~图 8,图中给出了 3 种不同工况下两种约束方法对应的接触区域的范围。经过计算,获得大轮凸面接触区域最大接触应力见表 4,加载传动误差结果见表 5,传动误差曲线见图 9~图 11,图中 φ_1 表示小轮转角, $\Delta\varphi_2$ 表示大轮传动误差。图 12~图 14 给出了受载后应力云图分布,为了与实际接触印迹进行对比,将上述齿轮副按照加工参数进行了实际加工,并进行了齿面误差检测,保证加工实际齿面与理论齿面小于 10 μm 。图 12~图 14 第 3 列为 3 种工况下齿面加载接触印迹的实验结果。

通过接触印迹对比可见,对于 3 种工况,图 6~图 8 中接触印迹区域在小端和大端的扩展位置不同,约束方法 2 在各工况下接触区域均小于约束方法 1。约束方法 1 对应的加载接触印迹范围更靠近小端;特别是通过工况 3 可以看出,约束方法 1 在 LTCA 结果中小端已经脱出,约束方法 2 印迹距离小端有一定距离还未脱出。通过与实验对比可见,约束方法 2 与实验结果更为接近,在工况 3 中约束方法 2 与实验结果都距离小端还有小段距离并未脱出。

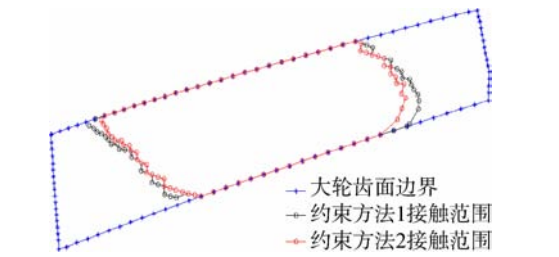


图 6 两种约束方法接触区范围对比(工况 1)
Fig. 6 Contact zone of two constraint methods (case 1)

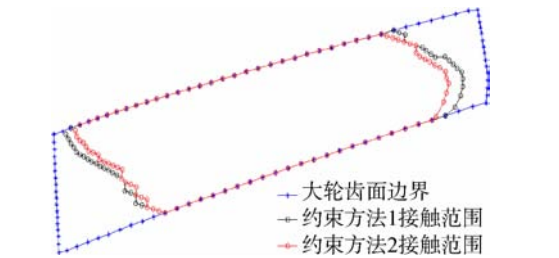


图 7 两种约束方法接触区范围对比(工况 2)
Fig. 7 Contact zone of two constraint methods (case 2)

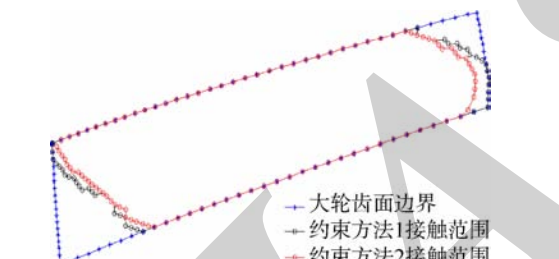


图 8 两种约束方法接触区范围对比(工况 3)
Fig. 8 Contact zone of two constraint methods (case 3)

表 4 最大接触应力计算结果			
约束方法	工况 1	工况 2	工况 3
1	1536.804	2012.294	2366.874
2	1507.990	1972.036	2315.049

表 5 传动误差计算结果				
参数	约束方法	工况 1	工况 2	工况 3
传动误差峰峰值	1	36.12882	37.47393	25.8301
	2	33.5247	36.3592	28.640
传动误差幅值	1	-342.423	-532.771	-696.936
	2	-315.617	-485.345	-629.480

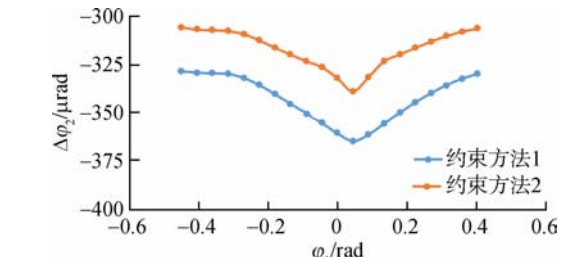


图 9 两种约束方法加载传动误差曲线对比(工况 1)
Fig. 9 Loaded transmission error of two constraint methods (case 1)

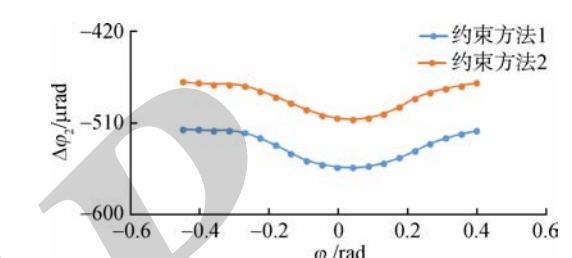


图 10 两种约束方法加载传动误差曲线对比(工况 2)
Fig. 10 Loaded transmission error of two constraint methods (case 2)

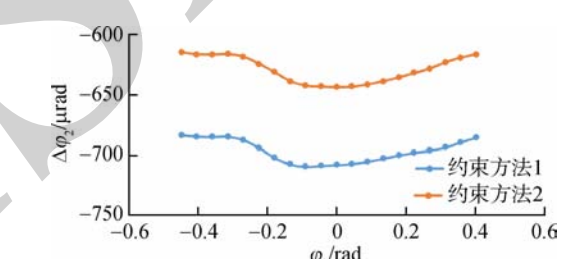


图 11 两种约束方法加载传动误差曲线对比(工况 3)
Fig. 11 Loaded transmission error of two constraint methods (case 3)

从传动误差计算结果表 5 和传动误差曲线图 9~图 11 中可以看出,对于 2 种不同的约束方法,传动误差曲线图形式相同,传动误差峰峰值变化不大;传动误差幅值约束方法 2 小于约束方法 1。传动误差的幅值与接触印迹区域的规律也是相吻合的,接触印迹区域范围小的传动误差幅值小。通过表 4 还可看出约束方法对最大接触应力的影响不大,最大应力发生的位置从云图上看两种约束方法也基本相同,这是因为约束方法的不同主要影响的是弯曲变形。

上述分析表明本文提出的消除弯曲变形中其他变形的约束方法相比原约束方法能更好地反应齿轮实际弯曲变形情况,而约束方法 1 在计算弯曲变形时包含了其他变形导致整体的变形增大,齿轮加载后齿面接触印迹扩展速度加快。

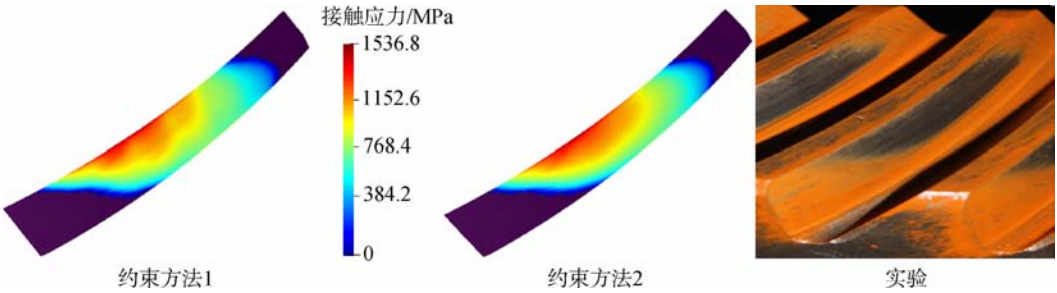


图 12 两种约束方法及实验接触印迹(工况 1)

Fig. 12 Contact pattern of two constraint methods and experiment (case 1)

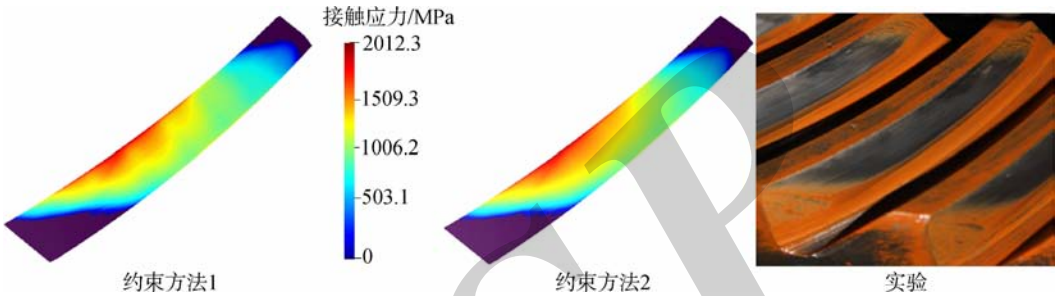


图 13 两种约束方法及实验接触印迹(工况 2)

Fig. 13 Contact pattern of two constraint methods and experiment (case 2)

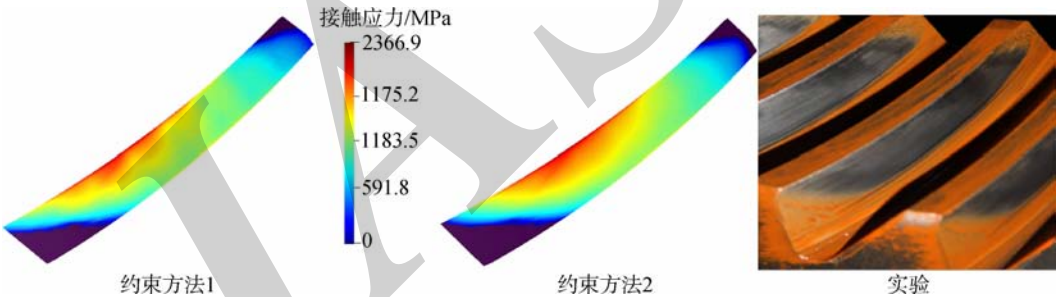


图 14 两种约束方法及实验接触印迹(工况 3)

Fig. 14 Contact pattern of two constraint methods and experiment (case 3)

5 结 论

本文提出了一种准双曲面齿轮 LTCA 时用于消除弯曲变形中包含的其他变形的约束方法。通过不同约束方法的分析发现,使用本文提出的约束方法,得到的计算结果接触印迹扩展速度比原有约束方法计算得到的印迹扩展速度慢,传动误差的幅值比原有方法小,传动误差峰峰值基本相同,最大接触应力值基本相同。将分析结果与实际实验吻合更好;因此说明在进行 LTCA 时,本文提出的约束方法能更准确地获得轮齿弯曲变形并更好地预测接触印迹的位置。

参考文献:

[1] Gleason Works. Bevel and hypoid gear design handbook [M]. Rochester NY:Gleason Works,1956.

[2] LITVIN F L. Gear geometry and applied theory[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Incorporation, 1994.

[3] KRENZER T J. Tooth contact analysis of spiral and hypoid gears under load[R]. Peoria, Illinois: Gleason Works SD3458(SAE810688),1981.

[4] 何敬安,匡忠信. 在载荷作用下螺旋锥齿轮及准双曲面齿轮轮齿接触分析[J]. 机械传动,1986,10(5):21-25.
HE Jingan,KUANG Zhongxin. Loaded tooth contact analysis of spiral bevel and hypoid gears [J]. Mechanical Transmission,1986,10(5):21-25. (in Chinese)

[5] 郑昌启,黄昌华,吕传贵. 螺旋锥齿轮轮齿加载接触分析原

理[J]. 机械工程学报,1993,29(4):50-55.

ZHENG Changqi, HUANG Changhua, LÜ Chuangui. Computational principle of loaded tooth contact analysis of spiral gears[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,1993,29(4):50-55. (in Chinese)

[6] VARADI K,POLLER R. Analysis of gear teeth by the finite element method[J]. Acta Technica,1988,101(4):397-416.

[7] WILCOX L,THOMAS D C,GREGORY C N. Improved finite element model for calculating stresses in bevel and hypoid gear teeth[R]. American Gear Manufacturers Association,AGMA Paper 97FTM5,1997.

[8] FAN Q,WILCOX L. New developments in tooth contact analysis (TCA) and loaded TCA for spiral bevel and hypoid gear drives[R]. American Gear Manufacturers Association,AGMA Paper,05FTM08,2005.

[9] 方宗德. 齿轮轮齿承载接触分析(LTCA)的模型和方法[J]. 机械传动,1998,22(2):1-3,16.

FANG Zongde. Model and approach for loaded tooth contact analysis (LTCA) of gear drives[J]. Mechanical Transmission,1998,22(2):1-3,16. (in Chinese)

[10] FANG Zongde. Loaded tooth contact analysis for spiral bevel gears considering edge contact[R]. Tianjin:the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science,2004.

[11] 胡磊. 汽车主减速器螺旋锥齿轮参数化建模与有限元分析[D]. 武汉:武汉理工大学,2008.

HU Lei. Parameter modeling and finite element analysis for final drive spiral bevel gear[D]. Wuhan:Wuhan University of Technology,2008. (in Chinese)

[12] BIBEL G,KUMAR A,REDDY S, et al. Contact stress analysis of spiral bevel gears using nonlinear finite element static analysis[R]. AIAA 93-2296,1993.

[13] 唐进元,陈嫦,蒲太平. 考虑误差、轴变形和轴承刚度的弧齿锥齿轮 LTCA[J]. 机械传动,2010,34(5):5-8.

TANG Jinyuan,CHEN Chang,PU Taiping. LTCA analysis of spiral bevel gears with machining errors, assembly errors, axial deformation and bearing stiffness[J]. Mechanical Transmission,2010,34(5):5-8. (in Chinese)

[14] 侯祥颖,方宗德,邓效忠等. 弧齿锥齿轮有限元建模与接触分析[J]. 哈尔滨工程大学学报,2015,36(6):826-830.

HOU Xiangying, FANG Zongde, DENG Xiaozhong. Contact analysis of spiral bevel gears based on finite element model[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2015,36(6):826-830. (in Chinese)

[15] SIMON V. FEM stress analysis in hypoid gears[J]. Mechanism and Machine Theory,2000,35(9):1197-1220.

[16] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L. The finite element method: Volume 1 [M]. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann Incorporation,2000.

[17] BATHE K J. Finite element procedures[M]. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall Incorporation,2007.

[18] ROBERT J G. Reduction of stiffness and mass matrices[J]. AIAA Journal,1964,3(2):380.

(编辑:王碧琚)